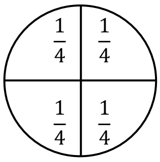
Zahlen und Operationen

Brüche und Anteile

Teilt man ein Ganzes in n gleich große Teile, so heißt jeder Teil $\frac{1}{n}$ des Ganzen

Bsp.: 

Ein Ganzes in 4 gleich große Teile, jeder Teil ist $\frac{1}{4}$ des Ganzen.

Mit Hilfe von Brüchen kann man <u>Anteile</u> eines Ganzen darstellen.

Der *Zähler* gibt an, wie viele dieser Teile gezählt werden.

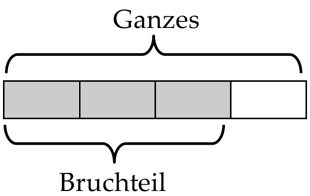
$$\frac{z}{n}$$

Bruchstrich

Der *Nenner* gibt an, in wie viele gleich große Teile das Ganze unterteilt wird.

Es gilt: „Der **Anteil** von etwas **Ganzem** ergibt den **Bruchteil**!“

Bsp.: Anteil: $\frac{3}{4}$



„Nimm das Ganze, mache 4 gleich große Teile daraus und nimm 3 davon!“

Grundaufgaben zu Bruchteil, Ganzes, Anteil

Bruchteil	*Ganzes*	*Anteil*
$\frac{3}{4}$ von 16 km	$\frac{3}{4}$ von ? = 12 km	12 km von 17 km
$(16\text{ km} : 4) \cdot 3 = 4\text{ km} \cdot 3 = 12\text{ km}$	$(12\text{ km} : 3) \cdot 4 = 4\text{ km} \cdot 4 = 16\text{ km}$	$\frac{12\text{ km}}{17\text{ km}} = \frac{12}{17}$

Erweitern und Kürzen

Erweitern: Zähler und Nenner werden mit derselben Zahl multipliziert.

Bsp.: $\frac{4}{7} = \frac{4 \cdot 3}{7 \cdot 3} = \frac{12}{21}$

Kürzen: Zähler und Nenner werden durch dieselbe Zahl dividiert.

Bsp.: $\frac{36}{48} = \frac{36:12}{48:12} = \frac{3}{4}$ oder $\frac{36}{54} = \frac{36:9}{54:9} = \frac{4}{6} = \frac{4:2}{6:2} = \frac{2}{3}$

Ein Bruch heißt **vollständig gekürzt**, wenn Zähler und Nenner keinen gemeinsamen Teiler außer 1 mehr besitzen.

Größenvergleich von Brüchen

Brüche, die den gleichen Nenner haben, nennt man **gleichnamig**.
Bei solchen Brüchen gibt der Bruch mit dem größeren Zähler den größeren Anteil an.

Bsp.: $\frac{5}{8} > \frac{3}{8}$

Ist der Zähler gleich, so gibt der Bruch mit dem kleineren Nenner den größeren Anteil an.

Bsp.: $\frac{2}{3} > \frac{2}{5}$

Haben Brüche unterschiedliche Nenner, bringt man sie durch Erweitern und/oder Kürzen auf den **gleichen Nenner**.

Der **Hauptnenner** von Brüchen ist der kleinste gemeinsame Nenner, den man durch Erweitern erhält.
Man erhält ihn durch systematisches Probieren oder mit Hilfe der Primfaktorzerlegung des Nenners.

Bsp.: $\frac{5}{18}$ und $\frac{9}{28}$ Hauptnenner:

$$\begin{array}{lclcl} 18 & = & 2 \cdot 9 & = & 2 \cdot \boxed{3 \cdot 3} \\ 28 & = & 2 \cdot 14 & = & \boxed{2 \cdot 2} \cdot \boxed{7} \\ \hline \text{HN} & : & & & 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7 = 252 \end{array}$$

$$\frac{5}{18} = \frac{5 \cdot 14}{18 \cdot 14} = \frac{70}{252} < \frac{81}{252} = \frac{9 \cdot 9}{28 \cdot 9} = \frac{9}{28}$$

Prozente

Der **Nenner 100** hat eine besondere Bedeutung. Mit ihm kann man Anteile als Prozente darstellen.

Bsp.: $35\% = \frac{35}{100} = \frac{7}{20}$ $\frac{8}{25} = \frac{8 \cdot 4}{25 \cdot 4} = \frac{32}{100} = 32\%$

Brüche und besondere Prozentangaben:

$\frac{1}{100} = 1\%$ $\frac{1}{10} = 10\%$ $1 = 100\%$

$\frac{1}{4} = 25\%$ $\frac{1}{2} = 50\%$ $\frac{3}{4} = 75\%$

$\frac{1}{5} = 20\%$ $\frac{2}{5} = 40\%$ $\frac{3}{5} = 60\%$ $\frac{4}{5} = 80\%$

Brüche als Quotienten

Den Quotienten $z : n$ zweier natürlicher Zahlen kann man als Bruch $\frac{z}{n}$ schreiben.
Es gilt: $z : n = \frac{z}{n}$

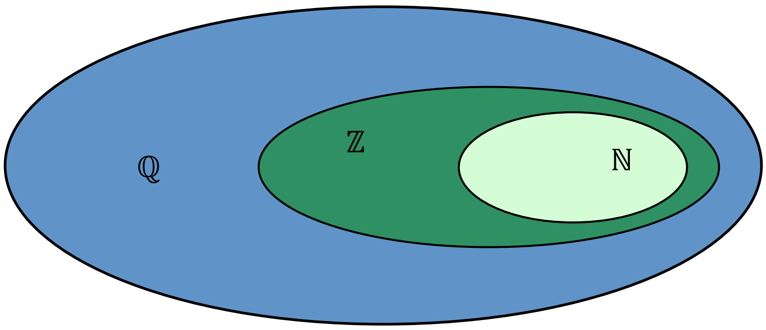
Achtung: Eine Division durch 0 ist nicht zulässig!!!
Daher darf der Nenner eines Bruchs nie 0 sein!

Bsp.: $\frac{3}{4} = \frac{6}{8} = \frac{12}{36} = \frac{36}{48} = \cdots = 3 : 4$

Zahlen, die man durch Brüche angeben kann, heißen **Bruchzahlen**. Auch natürliche Zahlen können durch Brüche angegeben werden. Bruchzahlen können auf der Zahlengeraden dargestellt werden. Dabei gilt weiterhin: Die weiter rechts liegende Zahl ist die größere!!!

Die Menge der rationalen Zahlen

Die Menge aller positiven und negativen Bruchzahlen und die Null bilden die Menge der **rationalen Zahlen** $\mathbb{Q}$, in der auch alle natürlichen und ganzen Zahlen liegen.



Bsp.: $\frac{3}{5} \in \mathbb{Q}$, aber $\frac{3}{5} \notin \mathbb{Z}$ und $\frac{3}{5} \notin \mathbb{N}$
$-\frac{4}{2} = -2 \in \mathbb{Q}$ und $-\frac{4}{2} = -2 \in \mathbb{Z}$, aber $-\frac{4}{2} = -2 \notin \mathbb{N}$
$\frac{16}{4} = 4 \in \mathbb{N}$, $\frac{16}{4} = 4 \in \mathbb{Z}$ und $\frac{16}{4} = 4 \in \mathbb{Q}$

Addition und Subtraktion von Brüchen

Man macht die Brüche durch Erweitern/Kürzen gleichnamig und addiert bzw. subtrahiert die Zähler. Den Nenner behält man bei.

Bsp.: $\frac{2}{3} + \frac{5}{18} = \frac{12}{18} + \frac{5}{18} = \frac{17}{18}$ oder $\frac{5}{12} - \frac{2}{3} = \frac{5}{12} - \frac{8}{12} = -\frac{3}{12} = -\frac{1}{4}$

$\left(\frac{7}{18} + \frac{1}{9}\right) - \frac{20}{25} = \left(\frac{7}{18} + \frac{2}{18}\right) - \frac{4}{5} = \frac{9}{18} - \frac{4}{5} = \frac{1}{2} - \frac{4}{5} = \frac{5}{10} - \frac{8}{10} = -\frac{3}{10}$

$2\frac{3}{4} - 4\frac{1}{2} = \frac{11}{4} - \frac{9}{2} = \frac{11}{4} - \frac{18}{4} = -\frac{7}{4} = -1\frac{3}{4}$ oder $2\frac{3}{4} - 4\frac{1}{2} = (2-4) + \left(\frac{3}{4} - \frac{2}{4}\right) = -2 + \frac{1}{4} = -1\frac{3}{4}$

Multiplikation von Brüchen

Man multipliziert zwei Brüche, indem man Zähler mit Zähler und Nenner mit Nenner multipliziert:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$$

Es gelten die bekannten Vorzeichenregeln!

Bsp.: $\frac{2}{3} \cdot \frac{9}{25} = \frac{2 \cdot 9}{3 \cdot 25} = \frac{2 \cdot 3}{1 \cdot 25} = \frac{6}{25}$ oder $\frac{28}{25} \cdot \left(-\frac{35}{21}\right) = -\frac{4}{5} \cdot \frac{7}{3} = -\frac{28}{15} = -1\frac{13}{15}$

Beachte, dass das Wort *„von"* als *„mal"* übersetzt werden kann:
$\frac{4}{5}$ von 8 dm = $\frac{4}{5} \cdot 8$ dm = $\frac{4 \cdot 8}{5}$ dm = $\frac{32}{5}$ dm = $6\frac{2}{5}$ dm = 6,4 dm

Division von Brüchen

Vertauscht man bei einem Bruch Zähler und Nenner, erhält man seinen **Kehrbruch**.
Man dividiert durch einen Bruch, indem man den Dividenden mit dem Kehrbruch des Divisors multipliziert:

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$$

Es gelten die bekannten Vorzeichenregeln!

Bsp.: $\frac{4}{7} : \frac{2}{21} = \frac{4 \cdot 21}{7 \cdot 2} = \frac{2 \cdot 3}{1 \cdot 1} = 6$ oder $-\frac{2}{3} : \left(-\frac{5}{9}\right) = +\frac{2 \cdot 9}{3 \cdot 5} = \frac{2 \cdot 3}{1 \cdot 5} = \frac{6}{5} = 1\frac{1}{5}$

Sonderfall „Doppelbruch": Der Hauptbruchstrich ist als Divisionszeichen zu deuten!

$$\frac{\frac{9}{16}}{\frac{3}{4}} = \frac{9}{16} : \frac{3}{4} = \frac{9 \cdot 4}{16 \cdot 3} = \frac{3 \cdot 1}{4 \cdot 1} = \frac{3}{4}$$

Dezimalbrüche

Durch Erweiterung der Stellenwerttafel gelangt man zur **dezimalen Schreibweise**:

...	Zehner(Z)	Einer(E)		Zehntel(z)	Hundertstel(h)	Tausendstel(t)	...	Dezimalbruch	Bruch
	3	1	,	0	9	5		31,095	$31\frac{95}{1000}$
	0	9	,	5	8	0		9,58	$9\frac{58}{100}$

Hierbei trennt das Komma die Ganzen von den Teilen des Ganzen. Die Ziffern nach dem Komma nennt man **Dezimalen**.

Bsp.: 31,095 (*gelesen*: einunddreißig Komma null neun fünf)
$31{,}095 = 31 + 0 \cdot \frac{1}{10} + 9 \cdot \frac{1}{100} + 5 \cdot \frac{1}{1000} = 31\frac{95}{1000}$

Bei einem Dezimalbruch gibt die am weitesten rechts stehende Ziffer die Stufenzahl im Nenner an!